УДК 530.145.530.12

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА И ТЕОРИЯ СПИНОРОВ

Работа посвящена спинорам в теории относительности и в квантовой теории. В ней излагается также теория пифагоровых чисел. Целью работы является на основе историко-математического метода прояснение геометрической и физической сущности спиноров. Показано, что формулы Пифагора для прямоугольного треугольника естественным образом приводят к спинорному представлению ортохронной группы Лоренца. Указано, что так называемый вектор состояния в квантовой фермионной теории является спинором евклидова пространства, а в квантовой бозонной теории - спинором симплектического пространства. Практическая задача древности - начертить прямой угол на земле - оказывается тесно связанной с обеими главными физическими теориями двадцатого века.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Pythagoras Numbers and Theory of Spinors

N.A.Chernikov, N.S.Shavokhina

The paper is devoted to spinors in the theory of relatively and quantum theory; it also expounds the theory of Pythagoras numbers. Based on a historical-mathematical method the geometrical and physical meaning of spinors is clarified. It is shows that the Pythagoras formulae for a right triangle lead naturally to a spinor representation of the Lorentz orthochronous group. The state vector in quantum fermion theory is proved to be a spinor of the Euclidean space, and in quantum boson theory, a spinor of the symplectic space. The practical problem of ancient ages, to draw on the Earth's surface a right angle, appears to be tightly connected with both the main theories of the twentieth century.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Пифагоровы числа

Землемеры научились чертить прямой угол на земле в давно прошедшие времена, о чем свидетельствуют древние следы их работы. Можно думать, что для облегчения названной операции в те времена был изобретен специальный инструмент, следующим способом изготовляемый из веревки и трех колышков. На веревку, прикладывая к ней палку, равномерно наносят тринадцать меток, затем первую метку скрепляют с последней, а остальную часть веревки отрезают. К получившемуся кольцу с двенадцатью метками привязывают колышки в местах первой, пятой и десятой меток. В результате инструмент готов. Разнося колышки до предела так, чтобы веревочное кольцо натянулось в виде прямолинейного треугольника, и вбивая колышки в землю, получают на земле прямой угол с вершиной в первой метке.

Этот угол прямой, потому что получающийся таким способом треугольник имеет стороны длиной в три, четыре и пять палок, а значит, удовлетворяет условию Пифагора

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0 \qquad /1/$$

для прямоугольного треугольника с катетами x, y и гипотенузой t.

Вместо тринадцати можно нанести на веревку тридцать одну метку и получить кольцо с тридцатью метками, а колья привязать в местах первой, тринадцатой и двадцать шестой меток. В этом случае получается веревочный треугольник со сторонами длиной в пять, двенадцать и тринадцать палок. Он тоже удовлетворяет условию /1/.

Первым треугольником удобно пользоваться на просторных площадках, вторым - в тесных местах. Подобно этому современные чертежники пользуются двумя прямоугольными треугольниками, в первом из которых одинаковые катеты, а во втором один из катетов равен половине гипотенузы.

Имеются сведения о том, что в Древнем Вавилоне знали все прямоугольные треугольники, стороны которых пропорциональны целым числам [1,2]. Такие тройки целых чисел называются пифагоровыми [3]. Сам Пифагор нашел решение уравнения /1/ в виде [4]

$$x = (a^2 - 1)\ell, \quad y = 2a\ell, \quad t = (a^2 + 1)\ell, \qquad /2/$$

где a - целое число и $a > 1$, ℓ - длина упоминаемой выше палки. Если положить $\ell = \eta^2$ и обозначить $\xi = a\eta$, то формулы Пифагора /2/ примут вид

$$x = \xi^2 - \eta^2, \quad y = 2\xi\eta, \quad t = \xi^2 + \eta^2. \qquad /3/$$

По этим формулам можно получить все тройки взаимно простых пифагоровых чисел. При этом надо считать, что именно y, а не x является четным числом, величины ξ и η - взаимно простые целые числа, из которых одно четное, и $\xi > \eta > 0$ /5,6/ .

Если же считать, что ξ и η - любые положительные /не обязательно целые/ числа и $\xi > \eta$, то катеты и гипотенуза произвольного прямоугольного треугольника представляются в виде /3/, где, наоборот,

$$\xi = \sqrt{\frac{t+x}{2}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{t-x}{2}}. \qquad /4/$$

Спиноры трехмерного пространства

Будем теперь считать, что произвольные вещественные числа x, y, t являются координатами псевдоевклидова пространства и что квадрат длины вектора $\vec{x} = \{x, y, t\}$, приложенного к началу координат, равен

$$\vec{x}^2 = x^2 + y^2 - t^2 . \qquad /5/$$

По определению изотропные векторы лежат на световом конусе /1/, а следовательно, представляются по формулам Пифагора в виде /3/. Числа /4/ из области $\xi > \eta > 0$ являются параметрами на той части светового конуса /1/, где $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$. Если мы пожелаем охватить всю "верхнюю" часть светового конуса, т.е. ту его часть, где $t > 0$, то мы должны положить

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{t+x}{2}}, \quad \eta = \frac{t-x}{y}\,\xi. \qquad /6/$$

При этом каждой паре вещественных параметров ξ, η ставится в соответствие направленный в "будущее" изотропный вектор /3/, а каждому такому вектору ставятся в соответствие две взаимно противоположные пары /6/ параметров ξ, η.

Мировая траектория светового луча, проходящего в момент времени $t = 0$ через точку $x = 0$, $y = 0$, является прямолинейной образующей светового конуса /1/. Ее можно задать системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} -y\xi \;+\; (t+x)\eta &= 0 \\ -(t-x)\xi \;+\; y\eta &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad /7/$$

Здесь мы вплотную подошли к теории спиноров псевдоевклидова пространства [7].

Следуя Картану, спинором, приложенным к началу координат, называем столбец

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \qquad /8/$$

Вектор, приложенный к началу координат, представляем в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} -y & t+x \\ x-t & y \end{pmatrix}. \qquad /9/$$

В матричных обозначениях система уравнений /7/ записывается в виде

$$X\Xi = 0. \qquad /10/$$

Изотропному вектору /3/ соответствует матрица

$$X = 2\begin{pmatrix} -\xi\eta & \xi^2 \\ -\eta^2 & \xi\eta \end{pmatrix}. \qquad /11/$$

Определитель матрицы /9/ равен

$$\det X = t^2 - x^2 - y^2 = -\vec{x}^2. \qquad /12/$$

Отсюда следует, что система /7/ совместна тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ - изотропный вектор.

Квадрат матрицы /9/ равен

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2+y^2-t^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2-t^2 \end{pmatrix} = \vec{x}^2. \qquad /13/$$

Скалярную матрицу отождествляем с числом. Пусть X, Y - произвольные векторы, а λ - произвольное число. Согласно /13/ $(X+\lambda Y)^2 = (\vec{x}+\lambda\vec{y})^2$, а следовательно,

$$XY + YX = 2\vec{x}\vec{y}. \qquad /14/$$

Наряду со световым конусом /1/ весьма важное значение имеют однополостный гиперболоид

$$X^2 = 1 \qquad /15/$$

и двуполостный гиперболоид

$$X^2 = -1 . \qquad /16/$$

На "верхней" части гиперболоида /16/

$$t = \sqrt{1 + x^2 + y^2} . \qquad /17/$$

С точки зрения внутренней геометрии, задаваемой метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2 = dx^2 + dy^2 - \frac{(xdx + ydy)^2}{1 + x^2 + y^2} , \qquad /18/$$

поверхность /17/ является плоскостью Лобачевского. Отсюда следует, что ортохронная группа Лоренца трехмерного пространства-времени совпадает с группой изометрий плоскости Лобачевского.

Простейшее из ортохронных преобразований Лоренца - это зеркальное отражение в плоскости, проходящей через начало координат и ортогональной к вектору, конец которого находится на однополостном гиперболоиде /15/. Обозначим этот вектор $\vec{e}$. Пусть $\vec{x}$ - произвольный вектор и $\vec{x}'$ - его зеркальный образ. Так как вектор $\vec{e}$ коллинеарен вектору $\vec{x}' - \vec{x}$ и ортогонален вектору $\vec{x} + \vec{x}'$, то

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2(\vec{e}\vec{x})\vec{e} , \qquad /19/$$

а так как $2(\vec{e}\vec{x}) = EX + XE$ и $E^2 = 1$, то для соответствующих матриц справедливо соотношение

$$X' = -EXE . \qquad /20/$$

Зеркальным образом спинора Ξ является спинор

$$\Xi' = E\Xi . \qquad /21/$$

Ортохронное преобразование Лоренца с положительным якобианом получается в результате последовательного выполнения зеркальных отражений в двух таких плоскостях: $X'' = -E_2X'E_2$, $X' = -E_1XE_1$, т.е. $X'' = E_2E_1XE_1E_2$. Следовательно,

$$X'' = SXS^{-1} , \quad \Xi'' = S\Xi , \qquad /22/$$

где $S = E_2E_1$, $S^{-1} = E_1E_2$.

Ортохронное преобразование Лоренца с отрицательным якобианом - это либо одно зеркальное отражение, либо результат трех таких отражений: $X''' = -E_3 X'' E_3$, $X'' = -E_2 X' E_2$, $X' = -E_1 X E_1$, т.е. $X''' = -E_3 E_2 E_1 X E_1 E_2 E_3$. Следовательно,

$$X''' = -TXT^{-1}, \quad \Xi''' = T\Xi, \qquad /23/$$

где $T = E_3 E_2 E_1$, $T^{-1} = E_1 E_2 E_3$. В частности, если $E_3 = E_2$, то $T = E_1 = T^{-1}$.

Плоскость

$$\vec{e}\vec{x} = 0, \quad \vec{e}^2 = 1 \qquad /24/$$

пересекает поверхность /17/ по "верхней" ветви гиперболы, которая представляет прямую на плоскости Лобачевского. Зеркальное отражение пространства в плоскости /24/ взаимно однозначно сопровождается зеркальным отражением плоскости Лобачевского в этой прямой.

Переход к комплексным числам ξ и η приводит к спинорам трехмерного евклидова пространства как над полем комплексных, так и над полем вещественных чисел [7].

Спиноры многомерных пространств

Спиноры n-мерного евклидова пространства были открыты Эли Картаном в 1913 г.[7,8]. В начальном случае $n = 3$ Картан исходит из формул Пифагора /3/. Если $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$, где ν - целое число, то вектор $\vec{x}$ представляется квадратной матрицей X порядка 2^ν, а спинор Ξ - столбцом из 2^ν чисел. Как и в трехмерном случае, квадрат матрицы X равен скалярному квадрату вектора $\vec{x}$, а следовательно, для двух таких матриц X и Y справедливо равенство /14/. Матрица, представляющая вещественный вектор, эрмитова. Чтобы геометрически обосновать известную теорию Дирака, надо положить $\nu = 2$.

Зеркальное отражение /19/ в гиперплоскости $\vec{e}\vec{x} = 0$, $\vec{e}^2 = 1$ и в n-мерном случае представляется в виде /20/. Каждое вращение пространства вокруг начала координат является произведением четного числа $\leq n$ отражений в таких плоскостях.

Пусть векторы $\vec{h}_a$, где $a \in \{1, \dots, n\}$, составляют базис, а их скалярные произведения равны $\vec{h}_a \vec{h}_b = h_{ab}$. Согласно /14/ соответствующие матрицы H_a удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$H_a H_b + H_b H_a = 2h_{ab}. \qquad /25/$$

Наряду с матрицами H_a введем матрицы H^a из условия, что

$$H_a = \sum_{b=1}^{n} h_{ab} H^b . \qquad /26/$$

Матрица X, представляющая вектор

$$\vec{x} = \sum_{a=1}^{n} x^a \vec{h}_a , \qquad /27/$$

равна

$$X = \sum_{a=1}^{n} x^a H_a = \sum_{a=1}^{n} x_a H^a , \qquad /28/$$

где

$$x_a = \sum_{b=1}^{n} h_{ab} x^b . \qquad /29/$$

Линейное преобразование

$$x'^a = \sum_{b=1}^{n} L^a_b x^b \qquad /30/$$

пространства называется вращением пространства вокруг начала координат, если удовлетворяются условия [9]

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} h_{pq} L^p_a L^q_b = h_{ab}, \qquad \det \| L^a_b \| = 1 . \qquad /31/$$

Этому преобразованию соответствует квадратная матрица S порядка 2^ν, такая, что

$$X' = SXS^{-1}, \qquad \Xi' = S\Xi . \qquad /32/$$

Отсюда следует, что

$$SH_a S^{-1} = \sum_{b=1}^{n} L^b_a H_b , \qquad S^{-1} H^a S = \sum_{b=1}^{n} L^a_b H^b . \qquad /33/$$

В случае бесконечно малого вращения

$$\delta x^a = x'^a - x^a = \sum_{b=1}^{n} \omega^{ab} x_b , \qquad /34/$$

где

$$\omega^{ab} + \omega^{ba} = 0 . \qquad /35/$$

В этом случае $S = 1 + \Omega$, где

$$\Omega = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \omega^{pq} H_p H_q , \qquad /36/$$

так что

$$\delta X = X' - X = \Omega X - X\Omega , \qquad /37/$$

$$\delta \Xi = \Xi' - \Xi = \Omega \Xi . \qquad /38/$$

Алгебра Клиффорда

Если некоторые векторы $\vec{e}_a$, где $a \in \{1, \dots, n\}$, образуют ортонормированный базис, то соответствующие матрицы E_a удовлетворяют перестановочным соотношениям Клиффорда

$$E_a E_b + E_b E_a = 2\delta_{ab} . \qquad /39/$$

Алгебра K_n, порожденная единицей 1 и другими элементами $E_1, \dots, E_n$, удовлетворяющими соотношениям /39/, называется алгеброй Клиффорда. Генераторы 1, $E_1, \dots, E_n$ и произведения $E_{a_1} \dots E_{a_m}$, где $2 \le m \le n$, $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, составляют базис алгебры K_n. Следовательно, размерность этой алгебры как векторного пространства равна 2^n. Действительно, по биному Ньютона $1 + n + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n$.

При $n = 2\nu$ алгебра $K_{2\nu}$ простая. Она эквивалентна алгебре квадратных матриц порядка 2^ν.

При $n = 2\nu + 1$ алгебра $K_{2\nu+1}$ полупростая. Она распадается в прямую сумму двух одинаковых подалгебр, каждая из которых эквивалентна $K_{2\nu}$. Картан выбирает ту из подалгебр, в которой

$$E_1 \dots E_{2\nu+1} = i^\nu . \qquad /40/$$

Теперь понятно, почему число компонент спинора при $n = 2\nu$ и при $n = 2\nu + 1$ равно 2^ν.

Конечномерная модель квантовой теории поля

В 2ν-мерном пространстве базис

$$A_k = \frac{1}{2}(E_{2k-1} + iE_{2k}) , \quad A_k^+ = \frac{1}{2}(E_{2k-1} - iE_{2k}) ,$$

$$k \in \{1, \dots, \nu\} , \qquad /41/$$

приводит к конечномерной модели фермионного поля. Действительно, из перестановочных соотношений Клиффорда /39/ получаем перестановочные соотношения между операторами уничтожения и рождения ферми-частиц, а именно:

$$A_k A_\ell + A_\ell A_k = 0, \qquad A_k^+ A_\ell + A_\ell A_k^+ = \delta_{k\ell}, \qquad A_k^+ A_\ell^+ + A_\ell^+ A_k^+ = 0. \qquad /42/$$

Векторы A_k лежат в ν-мерной полностью изотропной плоскости Π. Алгебра Γ_ν, порожденная единицей 1 и другими элементами $A_1, \dots, A_\nu$ удовлетворяющими соотношениям $A_k A_\ell + A_\ell A_k = 0$, называется алгеброй Грассмана. Генераторы 1, $A_1, \dots, A_\nu$ и произведения $A_{k_1} \dots A_{k_\mu}$, где $2 \le \mu \le \nu$, $k_1 < k_2 < \dots < k_\mu$, составляют базис алгебры Γ_ν, так что размерность этой алгебры равна 2^ν, т.е. числу компонент спинора. Алгебра Грассмана является подалгеброй алгебры Клиффорда.

Все это в равной мере относится и к векторам A_k^+, лежащим в плоскости Π^+. Картан представляет спинор в виде столбца антисимметричных компонент $\xi_{k_1 \dots k_\mu}$. Каждому такому столбцу взаимно однозначно соответствует элемент

$$\hat{\Xi} = \xi_0 + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu!} \sum_{k_1=1}^{\nu} \dots \sum_{k_\mu=1}^{\nu} \cdot \xi_{k_1 \dots k_\mu} A_{k_1}^+ \dots A_{k_\mu}^+ \qquad /43/$$

алгебры Грассмана Γ_ν^+. Если заменить здесь $\mu!$ на $\sqrt{\mu!}$, то получится функционал Фока /10/.

Вакуумное состояние $|0\rangle$ представляется простым спинором и изображается плоскостью Π. Так называемый вектор состояния, равный

$$|\rangle = \hat{\Xi}\,|0\rangle = \Xi, \qquad /44/$$

на самом деле является спинором. Вектор состояния бозонного поля следовало бы также называть спинором, но уже не евклидова, а симплектического пространства. Представление о гамильтониане поля дает оператор /36/.

Спиноры Картана находятся в таком же отношении к векторам, в каком волновая функция Шредингера - к операторам координат и импульсов. Поэтому квантовую механику можно называть теорией спиноров симплектического пространства /по меньшей мере, если уравнения Гамильтона линейные/. В свою очередь, теория спиноров Картана является квантовой геометрией евклидова пространства.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б. В сб.: Историко-математические исследования. ГИФМЛ, М., 1958, вып.XI,с.446.
2. Раик А.Е. В сб.: Историко-математические исследования, ГИФМЛ, М., 1959, вып. XII, с. 315.
3. Большая советская энциклопедия. СЭ, М., 1975, Изд. 3, т. 19, с. 586.
4. Башмакова И.Г. В сб./1/ с. 243-244.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел, "Наука", М., 1972, с. 22, с. 107.
6. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. "Наука", М., 1982, с. 21, 31.
7. Картан Э. Теория спиноров. ИЛ, М., 1947, с. 64-77.
8. Cartan E. Bull.Soc.Math. de France, 1913, 41, p. 53-96.
9. Норден А.П. Пространства аффинной связности. Изд. 2, "Наука", М., 1976, с. 35-38, 48-49.
10. Фок В.А. Работы по квантовой теории поля. Изд. ЛГУ, Л., 1957.

Рукопись поступила 15 января 1985 года.